



अनुक्रमांक/ Roll No.

--	--	--	--	--	--

परीक्षार्थी अपना अनुक्रमांक यहाँ लिखें।

Candidate should write his/her Roll No. here.

कुल प्रश्नों की संख्या : 03

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 11

Total No. of Questions : 03

No. of Printed Pages : 11

M-SFS-II-2017 (05)

गणित

MATHEMATICS

ऐच्छिक विषय (Optional Subject)

द्वितीय प्रश्न-पत्र

Second Paper

समय : 3 घंटे]

[पूर्णांक : 200

Time : 3 Hours]

[Total Marks : 200

परीक्षार्थियों के लिए निर्देश :

Instructions to the candidates :

1. इस प्रश्न-पत्र में कुल तीन प्रश्न हैं तथा सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
This question paper consists of three questions and all questions are compulsory.
2. प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने अंकित हैं।
Marks for each question have been indicated on the right hand margin.
3. प्रश्न क्रमांक - 1 में कोई आंतरिक विकल्प नहीं है। शेष प्रश्नों में आंतरिक विकल्प दिया गया है।
There is no internal choice in Question No. 1. Remaining questions carry internal choice.

M-SFS-II-2017 (05)

P.T.O.

4. प्रथम प्रश्न अत्यन्त लघु-उत्तरीय है, जिसमें 15 अनिवार्य प्रश्न हैं। प्रत्येक का उत्तर एक अथवा दो पंक्तियों में देना है। प्रश्न क्रमांक – 2 लघु उत्तरीय है, शब्द सीमा 100 है। प्रश्न क्रमांक-3 दीर्घ उत्तरीय/निबंधात्मक है, शब्द सीमा 300 है।

The first question is of very short-answer type consisting of 15 compulsory questions. Each one is to be answered in one or two lines. Question No. 2 is short answer type, word limit is 100. Question No. 3 is long answer / Essay type, word limit is 300.

5. जहाँ शब्द सीमा दी गई है, उसका पालन करें।

Wherever word limit has been given, it must be followed to.

6. प्रश्न-पत्र के अनुसार ही प्रश्नों के उत्तर क्रमानुसार दें। एक प्रश्न के विभिन्न भागों के उत्तर अनिवार्य रूप से क्रमानुसार लिखें तथा उनके बीच अन्य प्रश्नों के उत्तर ना लिखें।

Question should be answered exactly in the order same as mentioned in the question paper. Answer to the various parts of the same question should be written together compulsorily and no answer of the other question should be inserted between them.

7. यदि किसी प्रश्न में किसी प्रकार की तथ्यात्मक तथा मुद्रण त्रुटि हो तो प्रश्न के हिन्दी तथा अंग्रेजी में से अंग्रेजी रूपान्तर को मानक माना जायेगा।

In case there is any error of factual nature or printing then out of the Hindi and English version of the question, the English version will be treated as standard.

8. परीक्षा में सामान्य कैलकुलेटर ही उपयोग में लाया जा सकता है।

Regular calculator alone can be used in the examination, not the Scientific one.

1. निम्नलिखित प्रत्येक लघु उत्तरीय प्रश्नों का उत्तर दो या तीन पंक्तियों में दीजिए : $15 \times 4 = 60$

Give answer of the following short answer type questions in 2 or 3 lines :

- (A) ध्रुवीय निर्देशांकों में एक प्रारम्भिक रेखा के समान्तर तथा ध्रुव से b दूरी से गुजरने वाली सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये ।

Find the equation of a straight line in polar co-ordinates which is parallel to initial line and passes at a distance of b from pole.

- (B) शंकु $2y^2 - 8yz - 4zx - 8xy + 6x - 4y - 2z + 5 = 0$ के शीर्ष के निर्देशांक ज्ञात कीजिये ।

Find the co-ordinate of the vertex of a cone

$$2y^2 - 8yz - 4zx - 8xy + 6x - 4y - 2z + 5 = 0$$

- (C) सप्रतिबंध (सापेक्ष) अभिसारी श्रेणी की परिभाषा दीजिये तथा एक ऐसी श्रेणी का उदाहरण दीजिये ।

Define conditional convergence series and give an example of such a series.

- (D) सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक अभिसारित अनुक्रम परिबद्ध होता है ।

Prove that every convergent sequence is bounded.

- (E) दिखाइये कि अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ जो कि $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ द्वारा परिभाषित है, अभिसारी नहीं होती है ।

Show that the sequence $\langle a_n \rangle$ defined by $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ does not converge.

- (F) यदि $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ तो दिखाइये कि $\text{grad } f(r) \times \vec{r} = 0$ जहाँ $f(r)$ केवल r का फलन है।

If $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, show that $\text{grad } f(r) \times \vec{r} = 0$ where $f(r)$ is a function of r alone.

- (G) प्रदर्शित कीजिये कि सदिश $v_1 = (1, 3, 2)$, $v_2 = (1, -7, -8)$ एवं $v_3 = (2, 1, -1)$ रेखिक आश्रित है।

Show that the vector $v_1 = (1, 3, 2)$, $v_2 = (1, -7, -8)$ and $v_3 = (2, 1, -1)$ are linearly dependent.

- (H) किसी अदिश फलन के दिक् अवकलज को परिभाषित कीजिये।

Define directional derivative of a scalar function.

- (I) बिन्दु $(1, 2, 3)$ से गुजरने वाली उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये जो रेखा $x - y + 2z = 5$; $3x + y + z = 6$ के समान्तर है।

Find the equation of the straight line through the point $(1, 2, 3)$ and parallel to the line $x - y + 2z = 5$; $3x + y + z = 6$.

- (J) समान्तर-चतुर्भुज जिसके विकर्ण $3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ तथा $\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ हो, का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

Find the area of the parallelogram having diagonals $3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, and $\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

- (K) अवकल समीकरण $(x^2y - 2xy^2) dx - (x^3 - 3x^2y) dy = 0$ का समाकलन गुणक ज्ञात कीजिये ।

Find the integrating factor of differential equation

$$(x^2y - 2xy^2) dx - (x^3 - 3x^2y) dy = 0.$$

- (L) सजातीय रैखिक अवकलन समीकरण की परिभाषा दीजिये ।

Define homogeneous linear differential equation.

- (M) परिमित विमीय रैखिक समष्टि की परिभाषा दीजिये ।

Define finite dimensional vector space.

- (N) यदि $T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$ द्वारा परिभाषित $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ एक रैखिक रूपान्तरण हो, तो T के प्रतिबिम्ब U की विमा ज्ञात कीजिये ।

Let $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be the linear transformation defined by

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z).$$

Find the dimension of image U of T .

- (O) आंशिक अवकल समीकरण $p^2 + q^2 = 4$ को हल कीजिये, जहाँ $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ एवं $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ है ।

Solve the partial differential equation $p^2 + q^2 = 4$, where $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ and $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

2. निम्नलिखित में से किन्हीं दस प्रश्नों के उत्तर दीजिये। प्रत्येक उत्तर लगभग 100 शब्दों की सीमा में हो।

$$10 \times 8 = 80$$

Write the answer of any ten (10) questions from the following questions. Each answer should be limited upto 100 words.

(A) यदि $\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{c} \times \vec{a}$ एवं $\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{c} \times \vec{b}$ हो, तो सिद्ध कीजिये कि $\frac{d}{dt} (\vec{a} \times \vec{b})$
 $= \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$

If $\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{c} \times \vec{a}$ and $\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{c} \times \vec{b}$, then prove that $\frac{d}{dt} (\vec{a} \times \vec{b})$
 $= \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$

- (B) स्टोक्स प्रमेय का कथन लिखिये तथा इस प्रमेय का सत्यापन फलन $F = x^2\vec{i} + xy\vec{j}$ के लिये कीजिये जिसको $z = 0$ तल में वर्ग, जिसकी भुजाएँ रेखाओं $x = 0$; $y = 0$; $x = a$; $y = a$ के अनुदिश है, की परिधि के साथ समाकलित किया जाता है।

State the Stoke's theorem and verify this theorem for the function $F = x^2\vec{i} + xy\vec{j}$ integrated round the square in the $z = 0$ plane whose sides are along the lines $x = 0$; $y = 0$; $x = a$; $y = a$.

- (C) अवकलन समीकरण $y \sin 2x \, dx + (-y^2 - \cos^2 x) \, dy = 0$ को हल कीजिये।

Solve the differential equation

$$y \sin 2x \, dx + (-y^2 - \cos^2 x) \, dy = 0$$

- (D) चार्पी विधि का प्रयोग करते हुये आंशिक अवकलन समीकरण $xp + 3yq = 2(z - x^2q^2)$ का सम्पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिये।

Using Charpit's method, find the complete integral of the equation

$$xp + 3yq = 2(z - x^2q^2).$$

- (E) सिद्ध कीजिये कि किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि V का प्रत्येक रैखिक स्वतंत्र उपसमुच्चय या तो V का मूलधार होता है या इसको V का एक मूलधार बनने हेतु विस्तारित किया जा सकता है।

Prove that every linearly independent subset of a finite dimensional vector space V is either a basis of V or can be extended to form a basis of V .

- (F) सदिश समष्टि $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ से $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ पर उस एक रैखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिये जिसकी परिसर $(1, 0, -1)$ तथा $(1, 2, 2)$ द्वारा विस्तारित उपसमष्टि होती हो।

Find a linear transformation from vector space $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ into $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ which has its range the subspace spanned by $(1, 0, -1)$ and $(1, 2, 2)$.

- (G) मानिये कि क्षेत्र F पर U तथा V सदिश समष्टियाँ हैं तथा T, U से V पर एक रैखिक रूपान्तरण हो। यह भी मानिये कि U एक परिमित विमीय है। तब सिद्ध कीजिये कि

$$\text{जाति}(T) + \text{शून्यता}(T) = \text{विमा } U$$

Let U and V be vector spaces over the field F and let T be a linear transformation from U into V . Suppose that U is finite dimensional. Then prove that

$$\text{rank}(T) + \text{nullity}(T) = \dim U$$

- (H) सिद्ध कीजिये कि $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

Prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

- (I) सिद्ध कीजिये कि वास्तविक संख्याओं का अनुक्रम, \mathbb{R} में अभिसारी होता है यदि एवं केवल यदि यह अनुक्रम एक कॉशी अनुक्रम हो।

Prove that a sequence of real numbers converges in \mathbb{R} if and only if it is a Cauchy sequence.

- (J) x के सभी धनात्मक मानों के लिये, श्रेणी

$$\frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^4 + \dots + \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n)}x^n + \dots$$

की अभिसरण का परीक्षण कीजिये।

Test for convergence of the series

$$\frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^4 + \dots + \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n)}x^n + \dots$$

for all positive values of x .

- (K) परवलय $x^2 + 4x - 3y = 0$ के शीर्ष, नाभि, अक्ष तथा नाभि जीवा का समीकरण ज्ञात कीजिये।

Find vertex, focus, axis and equation of the focal chord of the parabola $x^2 + 4x - 3y = 0$.

- (L) एक तल एक नियत बिन्दु (a, b, c) से गुजरता है तथा अक्षों को A, B तथा C पर काटता है। सिद्ध कीजिये कि गोले OABC के केन्द्र का बिन्दुपथ

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2 \text{ होता है। यहाँ O मूल बिन्दु है।}$$

A plane passes through a fixed point (a, b, c) and cut the axes in A, B and C. Prove that the locus of the centre of the sphere OABC is

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2. \quad \text{O being the origin.}$$

(M) बिन्दु $(4, 2, 4)$ से गुजरने वाले तथा तलों

$$2x + 5y + 4z + 1 = 0 \text{ एवं } 4x + 7y + 6z + 2 = 0$$

पर लम्बवत तल का समीकरण ज्ञात कीजिये।

Find the equation of the plane through the point $(4, 2, 4)$ and perpendicular to the planes

$$2x + 5y + 4z + 1 = 0 \text{ and } 4x + 7y + 6z + 2 = 0$$

(N) उस लम्ब वृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसका पथ प्रदर्शक वृत्त

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, x - y + z = 3 \text{ है।}$$

Find the equation of the right circular cylinder whose guiding circle is

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, x - y + z = 3$$

3. निम्नलिखित में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिये। प्रत्येक उत्तर लगभग 300 शब्दों की सीमा में हो।

$$3 \times 20 = 60$$

Write the answer of any **three (3)** questions from the following questions. Each answer should be limited upto **300** words.

(A) मानिये कि T एक सदिश समष्टि $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ पर एक रैखिक संकारक है जिसको मानक क्रमवार मूलाधार में आव्यूह

$$\begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

द्वारा निरूपित किया गया है। सिद्ध कीजिये कि T विकर्णीय योग्य है।

Let T be the linear operator on vector space $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ which is represented in the standard ordered basis by the matrix

$$\begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Prove that T is diagonalizable.

(B) प्राचल विचरण विधि द्वारा निम्नांकित समीकरण को हल कीजिये :

$$(x+2) \frac{d^2y}{dx^2} - (2x+5) \frac{dy}{dx} + 2y = (1+x)e^x.$$

Solve the following equation by the method of variation of parameters :

$$(x+2) \frac{d^2y}{dx^2} - (2x+5) \frac{dy}{dx} + 2y = (1+x)e^x.$$

(C) गॉस अपसरण प्रमेय का कथन लिखिये । $x^2 + y^2 = 4$; $z = 0$ तथा $z = 3$ से परिबद्ध

आँचल S के ऊपर फलन $\vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ के लिए गॉस अपसरण प्रमेय का सत्यापन कीजिये ।

State the Gauss divergence theorem. Verify the Gauss divergence theorem for function $\vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ taken over the region S bounded by $x^2 + y^2 = 4$; $z = 0$ and $z = 3$.

(D) यदि धनात्मक संख्याओं की अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ इस प्रकार है कि

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}), \text{ सभी } n \geq 2 \text{ के लिये, तब दिखाइये कि अनुक्रम } \langle a_n \rangle$$

अभिसारी होती है तथा $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ भी ज्ञात कीजिये ।

If $\langle a_n \rangle$ be a sequence of positive numbers such that

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}), \text{ for all } n \geq 2, \text{ then show that } \langle a_n \rangle \text{ converges and}$$

determine $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

- (E) एक बिन्दु P एक नियत तल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ पर घूमता है तथा P से गुजरने वाला व OP पर लम्बवत् तल अक्षों को A, B, C पर मिलता है। यदि A, B, C से गुजरने वाले तथा निर्देशांक तलों के समान्तर तलें बिन्दु Q पर मिलते हैं तो Q का बिन्दु पथ ज्ञात कीजिये।
यहाँ O मूल बिन्दु है

A point P moves on the plane $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, which is fixed and the plane through P and perpendicular to OP meets the axes in A, B, C. If the planes through A, B, C parallel to the co-ordinate planes meet in a point Q, then find the locus of point Q. O being the origin.
